Semaines de remise à niveau : Master 2 MVA

Ces séances de Cours – TD sont proposées à tous les élèves du master MVA et présentent les notions de bases nécessaires à la bonne compréhension des cours du master. Ces séances sont réparties en quatre thématiques :

-Analyse fonctionnelle et temps-fréquence,
-Probabilité,
-Optimisation convexe
-Statistiques

Vous trouverez ci-dessous les descriptifs détaillés par thématique. Notez que les cours pourront être donnés en anglais ou en français.

PROBABILITY THEORY: *M Clémençon*

Télécom, 46 rue Barrault, Paris 13ème.
16/09: cours 9h-12h en amphi Emeraude, TD 13h30-16h30 en amphi Emeraude
17/09: cours 9h-12h en amphi Emeraude, TD 13h30-16h30 en amphi Estaunié

Définitions
- définition d'un espace de probabilité (les définitions étaient rappelées dans les notes mais je n'en ai pas parlé en détail pendant le cours)
- variable aléatoire (définition, v.a. discrète, à densité, définition de la loi d'une v.a., théorème d'identification)

Indépendance
- définition, application du théorème d'identification
- Lemme de Borel Cantelli (dans les notes uniquement, je n'en ai pas parlé à l'oral)

Convergence de variables aléatoires
- loi faible/forte des grands nombres
- définition des différents types de convergence de v.a. et liens entre les différents modes
- caractérisation de la convergence en loi
- théorème de la limite centrale
- vecteurs Gaussiens (définition et caractérisation)

Conditionnement discret
- définition de l'espérance conditionnelle

Chaînes de Markov (temps discret, espace d'état discret)
- définition et notations
- propriété de Markov simple
- propriété de Markov forte (uniquement dans les notes, pas abordée à l'oral)
- irréductibilité, mesure invariante (récurrence/transience)
- comportement asymptotique

Introductions aux Martingales à temps discret

Exercices

FOURIER and FONCTIONAL ANALYSIS: *M Meinhardt*

Les 19 et 20 septembre, ENS Cachan, amphi Curie, bâtiment d'Alembert, 9h00-17h30

Fourier analysis

0. Prerequisites of the course:

0.1. Differential and integral calculus of one and several variables
0.2. Complex numbers: exp(i*t) = cos(t) + i * sin(t), etc.
0.3. Taylor series

0.4. Linear algebra, orthonormal bases
0.5. Given the graph of f(x), draw the graphs of f'(x) and a primitive off

1. The big picture: synthesis = play a chord in the piano,
analysis = recover the notes from the sound wave.

2. Historical context: Fourier's solution of heat equation;
convenience of expressing the initial condition as a Fourier series.

3. Comparison of the Taylor and Fourier approximations of the same function.

4. Basic constructions (with their main properties and some examples):

4.1. Fourier transform of an integrable function
4.2. Fourier series of a periodic function
4.3. Discrete Fourier transform
4.4. Discrete-Time Fourier Transform
4.5. General case: Fourier transform on a locally compact Abelian group

5. Shannon sampling theorem (proof of a simple case, using
trigonometric polynomials)

6. Fourier transform in 2D and its importance for image processing

Fonctional analysis

0. Prerequisites of the course:

0.1. Differential and integral calculus of one and several variables
0.2. Linear algebra: vector spaces, linear maps, inner products, dual space
0.3. Measure theory: null sets, equality "almost everywhere",
integrable functions
0.4. General topology: compactness, continuity, density
0.5. All norms in finite dimension are equivalent

1. The big picture: functions are points in an infinite dimensional space and
we can do geometry inside this space. The norms in these spaces play
a crucial role,
since not all norms are equivalent.

2. Crash course in Lebesgue integration: monotone convergence, dominated
convergence, density of continuous functions, Fubini-Tonelli theorems.

3. L^p spaces: definition, classical inequalities, completeness, Riesz
representation theorem, convolutions

4. Hilbert spaces (analogue to Euclidean space): definition, classical
inequalities and identities, projection on a closed convex set, Riesz theorem,
Hilbert bases, Lax-Milgram theorem

Exercices

OPTIMISATION CONVEXE : *M Pesquet*

Les 23 et 24 septembre, ENS Cachan, 09h30 – 17h00, amphi Curie, bâtiment d'Alembert

Minima et Infima
- Définition de minimum et d'infimum
- Condition suffisante d'existence de minima dans le cas fini-dimensionnel

Convexité

- définition de la convexité et lien avec l'existence de minima (et unicité)
- différentiabilité, et lien avec la convexité
- inéquations d'Euler
- Multiplicateurs de Lagrange et contraintes d'égalité
- Cas des contraintes d’inégalité

Algorithmes de résolutions
- Algorithme de gradient à pas fixe
- Algorithme de gradient à pas optimal
- Algorithme de gradient avec contraintes
- Méthode de Newton
- Méthode d’Uzawa

Exercices

STATISTICS: ***M Clémençon***

Télécom, 46 rue Barrault, Paris 13ème

25/09: cours 9h-12h en amphi Emeraude, TD 13h30-16h30 en amphi Emeraude,
26/09: cours 9h-12h en amphi Emeraude, TD 13h30-16h30 en amphi Emeraude

Quick review of basics:
Notations
Distributions
Statiscal model
Independence and conditional independence

Point estimation:
Maximum likelihood estimators
Practical computations of maximum likelihood estimators (MLE)
(using stationarity, constrained optimization, differentials)
Estimators obtained with the method of moments
Review of linear regression
Review of ridge regression
Review of Principal Component Analysis
- relation with Singular Value Decomposition

Bayesian estimation:
Basic principles and concepts: prior, posterior, likelihood, evidence
Posterior mean estimator (PM)
Maximum a posteriori estimator (MAP)
Examples of priors (e.g. Dirichlet) and application to the computation of simple Bayesian estimators.

Exercises:
Practice on the previous topics
Manipulation of basic distributions (binomial, multinomial,etc)
Risk of an estimator
Convergence of estimators
Comparisons of MLE, PM and MAP
PCA
Some non parametric tests (Mann-Whitney U-test)