

# **ANALYSE, Cachan**

Thomas Alazard, CNRS et ENS Paris-Saclay

Ce cours est une introduction à l'analyse fonctionnelle, à l'analyse harmonique et à l'analyse des équations aux dérivées partielles. Nous montrerons pour chaque thème des résultats majeurs qui pourront intéresser ceux qui se destinent à étudier l'analyse comme ceux qui désirent passer l'agrégation. Un polycopié sera distribué, contenant l'ensemble des énoncés, des démonstrations ainsi que des rappels et des compléments.

## **Partie I : Analyse Fonctionnelle et Topologie**

### 1 Théorèmes classiques en Topologie

- a. Schémas itératifs de Picard et de Newton
- b. Théorèmes de point fixe de Brouwer et de Leray-Schauder
- c. Théorème d'Arzela-Ascoli
- d. Théorème de Stone-Weierstrass

### 2 Théorèmes de Baire et de Banach

- a. Théorème de Baire
- b. Théorème de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte et du graphe fermé
- c. Exemples d'applications

### 3 Dualité et Convexité

- a. Analyse Hilbertienne
- b. Théorème de Hahn-Banach
- c. Convergence faible et convergence faible étoile

### 4 Espaces de Sobolev

- a. Dérivation au sens faible
- b. Inégalités de Poincaré et espaces de Sobolev définis sur un ouvert quelconque
- c. Traces et problème de Dirichlet

## **Partie II : Analyse Harmonique**

### 5. Analyse de Fourier

- a. Séries de Fourier
- b. Transformée de Fourier et distributions tempérées
- c. Décomposition de Littlewood-Paley

### 6. Fonction maximale et applications

- a. Convolution
- b. Fonction maximale d'Hardy-Littlewood
- c. Inégalité d'Hardy-Littlewood-Sobolev et injections de Sobolev

## **Partie III : Analyse des équations aux dérivées partielles**

### 7 Fonctions harmoniques

Propriété de la moyenne, Solution fondamentale du Laplacien

### 8. Equation d'Hamilton-Jacobi

Principe du maximum, méthode des caractéristiques, solutions de viscosité.

## **Titre : Introduction mathématique au traitement et à l'analyse des images digitales, et à leurs surprenantes applications**

*Professeur:* Jean-Michel Morel, CMLA, ENS de Cachan, [morel@cmla.ens-cachan.fr](mailto:morel@cmla.ens-cachan.fr)

*Budget pédagogique :* 4 heures/semaine, 11 séances de cours, 3 séances de TP et 7 séances d'exercices dirigés

*Déroulement :* 2 heures de cours hebdomadaires, 2 heures de TP/TD en alternance

*Matériel pédagogique fourni :* polycopié (en anglais) avec exercices, guides de TPs, exécution en ligne des algorithmes principaux dans le journal IPOL, articles de recherche directement liés au cours.

**Validation:**  $F = (MP+TP+E)/3$

E = 1 examen proche de questions de cours

TP = Rapports de TPs remis en présence (présence aux TPs obligatoire) et rapport de lecture d'article lié directement à un chapitre du cours (projet)

MP = Note de contrôle continu oral (exercices à préparer présentés au tableau, élèves responsables nommés à chaque TD et les autres invités à préparer les exercices pour profiter de la correction)

**Objectif du cours :** Les activités humaines reposent en grande part sur la perception visuelle de l'environnement. Ceci est vrai dans les médias où images et vidéo coulent à flot, mais cette dépendance de la vision est encore plus frappante dans toutes les activités scientifiques, sociales et techniques : médecine, astronomie, biologie, science des matériaux, contrôle vidéo, etc.

Cette dépendance a changé de caractère avec la généralisation de l'imagerie digitale il y a 25 ans. L'image, représentée numériquement laisse le champ libre aux mathématiciens et ingénieurs pour inventer des théories et des algorithmes la manipulant et l'analysant pour une gamme toujours plus étendue d'applications. Aussi le traitement et l'analyse d'images sont-ils devenus une science mathématique dans laquelle on retrouve des reformulations et usages nouveaux de nombreux outils mathématiques, ainsi que plusieurs modèles mathématiques nouveaux.

**Prérequis :** Le cours introduira toutes ses notions mais les étudiants en retireront une perspective plus large s'ils ont des notions de : analyse fonctionnelle, théorie des distributions, calcul différentiel, probabilité discrète, analyse numérique des EDP. Ce cours constituera une introduction très adaptée au M2 MVA.

**Thèmes traités:** Les images du discret au continu et réciproquement : la représentation des images par la méthode de Fourier-Shannon, applications aux transformations géométriques d'images

Couleur et contraste : la dynamique d'une image, l'égalisation d'histogramme et ses applications

Les théories Rétinex de perception du contraste et leurs applications

Résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires dans les images et applications :

-L'édition de Poisson : comment copier-coller dans les images, et nombreuses applications

-Implémentation exacte de l'équation de la chaleur : le « *scale space* » et sa discrétisation

L'invariance en reconnaissance des formes et la méthode SIFT, comparant deux images quelconques

L'invariance géométrique en reconnaissance des formes, méthodes ASIFT

### **Quelques références**

- 1- Web : [www.ipol.im](http://www.ipol.im) (sections sur *contrast and color*, *image comparison*, *denoising*)
- 2- J.M. Morel and G. Yu: is SIFT scale invariant? IPI 2011
- 3- D. Lowe Object recognition from local scale-invariant features IJCV 2004
- 4- P. Pérez, M. Gangnet, A. Blake, [Poisson image editing](#) ACM TOG 2003
- 5- R. C. Gonzalez, R.E. Woods, Digital Image Processing, Prentice Hall (3rd edition, 2007)

# OPTIMISATION ET OPTIMISATION NUMERIQUE, Cachan

## RESUME:

L'optimisation est une branche importante des mathématiques au regard des outils théoriques qu'elle propose mais aussi bien sûr du son rôle clé pour les applications des mathématiques dans un grand nombre de secteurs scientifique et technologique. Ce cours est une introduction à l'optimisation destiné à fournir un bagage minimal (et un peu plus !) à tout futur mathématicien. Il traite essentiellement des problèmes en dimension finie mais couvre un certain nombre de concepts essentiels, depuis l'optimisation sans contrainte jusqu'aux problèmes à contraintes égalités et/ou inégalités ainsi que le point de vue important de la dualité pour les problèmes convexes. L'accent sera mis aussi sur les algorithmes d'optimisation numérique. Quelques séances de travaux pratiques permettront à l'étudiant de mettre en pratique ces algorithmes. Des séances de TD accompagneront le cours.

## PROGRAMME:

- Chap 1: *Premiers éléments d'optimisation*. Généralités sur les problèmes d'optimisation. Théorème de projection sur un convexe fermé. Fonctions convexe, s.c.i, elliptique. Fonction convexe sci et sup des minorantes affines sur un Hilbert. Conditions d'optimalité du premier et second ordre pour les problèmes sans contraintes
- Chap 2: *Méthodes de descentes, gradient à pas optimal*. Gradient à pas optimal, vitesse de convergence et conditionnement. Recherche linéaire (Wolfe et Armijo). Convergence des méthodes de descentes avec recherche linéaire.
- Chap 3: *Méthodes de Newton et quasi-Newton*. Convergence quadratique de la méthodes de Newton. Méthodes de quasi-Newton DFP et BFGS. Convergence dans le cas quadratique. Gradient conjugué et extension de Polak Ribière. Comparaison des performances.
- Chap 4: *Optimisation sous contraintes d'égalité*. Rappels sur le TIL. Extréma liés. Lagrangien et condition du premier ordre. Conditions nécessaires et suffisantes du second ordre. Illustrations. Théorème de sensibilité.
- Chap 5: *Optimisation sous contraintes mixtes*. Contraintes actives et qualification des contraintes. Lemme de Farkas-Minkowski. Théorème de Karush-Kuhn-Tucker (dim infinie, contraintes mixtes).
- Chap 6: *Dualité pour les problèmes convexe*. Lagrangiens et points selles. Problème primal et dual, saut de dualité. Résolution du problème primal via le problème dual. Exemples.
- Chap 7: *Algorithmes proximaux*. Sous-différentielle. Enveloppe de Moreau et approximation prox. Algorithmes du point proximal et forward-backward. Exemples. Algorithme d'Uzawa. Compléments (fonction conjuguée, décomposition de Moreau, algorithme ISTA).
- Chap 8: *Topologie faible sur les Hilbert*. Convergence faible. Compacité faible des boules fortes sur les Hilbert séparables. Coercivité et fonctions faiblement sci. Théorème d'existence. Liens entre sci faible et sci faible séquentielle.

## MODALITES DE CONTROLE DES CONNAISSANCES

$F = \operatorname{argmin}_{\{0 \leq x \leq 20\}} \sum_{i \in TP} |x - N_i| + |x - E|^2/2$  où  $N_i$  = note du i-eme TP et  $E$  = note Examen

## **Statistiques mathématiques et apprentissage (5 ECTS)**

Les statistiques donnent un cadre mathématique à l'analyse de données et sont devenues de nos jours un outil essentiel dans de nombreux domaines telles que la biologie, le traitement du signal ou la publicité. Pour cela, elles supposent un modèle probabiliste sur ces données qu'il faut ensuite inférer. Ce cours présentera les bases de la modélisation statistique paramétrique ainsi que les outils d'estimations classiques associées. Dans une seconde partie du cours, nous traiterons de l'apprentissage statistique et des statistiques non-paramétriques. En particulier, nous nous intéresserons au problème de classification supervisée. Une ou deux séances de travaux pratiques mettront en œuvre les techniques et résultats vus en cours. Des séances de TD permettront de manipuler les concepts présentés.

### I Statistiques paramétriques

- 1) Modélisation et inférence statistique
- 2) Estimation ponctuelle
- 3) Test et optimalité
- 4) Régression linéaire

### II Apprentissage statistique

- 1) Pertes, risques et théorie de la décision
- 2) Minimisation du risque empirique
- 3) VC dimension
- 4) Agrégation d'experts
- 5) Algorithmes de classification

Modalités de contrôle des connaissances

$$F1 = \max(E, 4E/5 + T/5)$$

T = note aux TP et E = note Examen

## **Statistiques mathématiques, apprentissage et méthodes stochastiques. ((7,5 ECTS)**

Les algorithmes stochastiques jouent un rôle important dans les algorithmes d'apprentissage modernes et dans l'analyse et le contrôle des systèmes complexes. Aussi, ce cours présentera certaines méthodes fondamentales d'optimisation et de simulation stochastique. Ces méthodes seront illustrées par de nombreux cas pratiques en statistique, apprentissage et informatique. Puis elles seront pour certaines, l'objet d'une étude théorique approfondie. Aussi, une séance de TP sera l'occasion de mettre en œuvre ces techniques et d'observer numériquement leur comportement.

- 1) Introduction aux algorithmes stochastiques et rappel sur la simulation de v.a.
- 2) Méthodes récursives pour les systèmes linéaires (LMS, RLS, filtre de Kalman)
- 3) Approximation stochastique (algorithme de Robbins-Monro)
- 4) Méthode du gradient stochastique
- 5) Méthode d'optimisation stochastique sans gradient (algorithme de Kiefer-Wolfowitz, recuit simulé...)

Modalités de contrôle des connaissances

$$F = (2F1 + F2)/3$$

où F2 = Examen sur les méthodes stochastiques